
Neutrosophic Computing and Machine Learning {Número especial: Aplicación del método de investigación neutrosófico en el entorno postpandemia}, Vol. 22, 2022
University of New Mexico


Introducción a los conjuntos IndetermSoft e IndetermHyperSoft

Introduction to the IndetermSoft and IndetermHyperSoft Sets

Florentin Smarandache[1]

[1] Universidad de Nuevo México, Departamento de Matemáticas, Física y Ciencias Naturales, 705 Gurley Ave., Gallup, NM 87301, EE.UU.; smarand@unm.edu

Resumen: En este artículo se presenta por primera vez el *Conjunto IndetermSoft*, como extensión del Soft Set clásico (determinado), que opera con datos indeterminados, y de manera similar el Conjunto HyperSoft extendido al *Conjunto IndetermHyperSoft*, donde 'Indeterm' significa 'Indeterminado' (resultado incierto, conflictivo, no único). Están construidos sobre un *Álgebra IndetermSoft* que es un álgebra que trata con *Operadores IndetermSoft* resultantes de nuestro mundo real. Posteriormente, se presentan los Conjuntos IndetermSoft e IndetermHyperSoft y sus extensiones Difusa/Intuicionista Difusa/Neutrosófica y otras extensiones difusas así como sus aplicaciones.

Palabras clave: Soft Set; conjunto HyperSoft; Conjunto IndetermSoft; Conjunto IndetermHyperSoft; Operadores IndetermSoft; Álgebra IndetermSoft.

Abstract: This paper presents for the first time the IndetermSoft Set, as an extension of the classical (determinate) Soft Set, which operates on indeterminate data, and similarly the HyperSoft Set extended to the IndetermHyperSoft Set, where 'Indeterm' means 'Indeterminate' (uncertain, conflicting, non-unique result). They are built on an IndetermSoft Algebra which is an algebra dealing with IndetermSoft Operators resulting from our real world. Subsequently, the IndetermSoft and IndetermHyperSoft Sets and their Fuzzy/Fuzzy Intuitionistic/Neutrosophic and other fuzzy extensions and their applications are presented.

Keywords: Soft Set; HyperSoft set; IndetermSoft set; IndetermHyperSoft set; IndetermSoft operators; IndetermSoft algebra.

1. Introducción

El Soft Set clásico se basa en una función determinada (cuyos valores son ciertos y únicos), pero en nuestro mundo hay muchas fuentes que, por falta de información o ignorancia, proporcionan información indeterminada (incierta y no única, sino vacilante o alternativa).

Pueden ser modelados por operadores que tengan cierto grado de indeterminación debido a la imprecisión de nuestro mundo.

El artículo menciona las definiciones de los Conjuntos Soft e HyperSoft clásicos, luego muestra la distinción entre funciones suaves determinadas e indeterminadas.

Las tripletas neutrosóficas <Función, NeutroFunción, AntiFunción> y <Operador, NeutroOperador, AntiOperador> se discuten como partes del <Álgebra, NeutroÁlgebra, AntiÁlgebra> (Smarandache, 2019).

De manera similar, se toman en consideración las distinciones entre operadores determinados e indeterminados.

Posteriormente, se construye un Álgebra IndetermSoft, utilizando un operador suave determinado (joinAND), y tres operadores suaves indeterminados (disjoinOR, exclussiveOR, NOT), cuyas propiedades se estudian más adelante.

Las Álgebras IndetermSoft e IndetermHyperSoft son subclases del IndetermÁlgebra.

El IndetermÁlgebra se presenta como un álgebra cuyo espacio u operadores tienen algún grado de indeterminación (I > 0), y es una subclase de NeutroÁlgebra.

Se demostró que el Álgebra IndetermSoft y el Álgebra IndetermHyperSoft son Álgebras no Booleanas, ya que muchas Leyes Booleanas no se cumplen.

2. Definición de Soft Set Clásico

Sea U un universo de discurso, H un subconjunto no vacío de U, con P(H) el conjunto potencia de H, y a un atributo, con su conjunto de valores de atributos denotados por A. Entonces el par (F, H), donde $F: A \rightarrow P(H)$, se llama Soft Set clásico sobre H.

Molodtsov [1] definió el Soft Set en 1999, y Maji [2] el Soft Set Neutrosófico en 2013.

3. Definición de la Función Suave Determinada (Clásica)

La función anterior $F: A \rightarrow P(H)$, donde para cada $x \in A$, $f(x) \in P(H)$, y f(x) es cierta y única, se llama Función Determinada (Clásica).

4. Definición de la Función IndetermSoft

Se presenta por primera vez. Sea U un universo de discurso, H un subconjunto no vacío de U y P(H) el conjunto potencia de H. Sea a un atributo, y sea A un conjunto de valores de este atributo.

Una función $F: A \rightarrow P(H)$ se llama *Función IndetermSoft* si:

i. el conjunto A tiene alguna indeterminación;
ii. o *P(H)* tiene alguna indeterminación;
iii. o existe al menos un valor de atributo $v \in A$, tal que F(v) = indeterminado (poco claro, incierto o no único);
iv. o cualquiera de las dos o las tres situaciones anteriores.

La Función IndetermSoft tiene cierto grado de indeterminación, y como tal es un caso particular de la NeutroFunción [6, 7], definida en 2014 – 2015, que se recuerda a continuación.

5. <Función, NeutroFunción, AntiFunción>

Se ha formado la tripleta neutrosófica anterior [10, 11].

i. **Función (clásica)**, que es una función bien definida (definida internamente) para todos los elementos en su dominio de definición, o (T, I, F) = (1, 0, 0).
ii. **NeutroFunción** (o función neutrosófica), que es una función parcialmente bien definida (grado de verdad T), parcialmente indeterminada (grado de indeterminación I) y parcialmente definida externamente (grado de falsedad F) en su dominio de definición, donde $(T, I, F) \notin \{(1,0,0),(0,0,1)\}$.

iii. **Antifunción**, que es una función definida externamente para todos los elementos en su dominio de definición, o (T, I, F) = (0, 0, 1).

6. Aplicaciones del Soft Set

Un detective debe encontrar a los criminales entre una multitud de sospechosos. Para ello utiliza los testimonios de varios testigos.

Sea $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\} \cup \{\phi\}$ el conjunto de la multitud de sospechosos, dónde $\{\phi\}$ es el elemento vacío (nulo), y *c* el atributo criminal, que tiene dos valores de atributo C = {sí, no}.

i. La función $F_1 : C \to P(S)$, dónde $P(S)$ es el conjunto potencia de S, representa la información proporcionada por el testigo W_1.

Por ejemplo,

F_1 *(sí)* = s_3, lo que significa que, según el testigo W_1, el sospechoso s_3 es el criminal,

y F_1*(no)* = s_4, lo que significa igualmente, según el testigo W_1, que el sospechoso s_4 no es el criminal.

Estas son informaciones determinadas (exactas), provistas por el testigo W_1, por lo que se trata de un Soft Set clásico.

ii. Más adelante, la función $F_2 : C \to P(S)$, dónde $P(S)$ es el conjunto potencia de S, representa la información proporcionada por el testigo W_2.

Por ejemplo,

F_2*(sí)* = $\{\phi\}$, el elemento nulo, lo que significa que, según el testigo W_2, ninguno de los sospechosos del conjunto S es el criminal. Esta es también una información determinada como en el Soft Set clásico.

7. Operador indeterminado como extensión del Soft Set

iii. Nuevamente, la función $F_3 : C \to P(S)$, dónde $P(S)$ es el conjunto potencia de S, representa la información proporcionada por el testigo W_3.

Este testigo no puede proporcionar una información cierta y única, sino una información indeterminada (incierta, no única sino alternativa).

Por ejemplo:

$F_3(sí) = NOT(s_2)$

y $F_3(no) = s_3 \ OR \ s_4$

La tercera fuente (W_3) proporciona información indeterminada (poco clara, no única), dado que $NOT(s_2)$ significa que s_2 no es el criminal, entonces, en consecuencia: uno, dos o más sospechosos del conjunto restante de sospechosos {s1, s3, s4, s5} pueden ser el (los) criminal(es), o $\{\phi\}$ (ninguno de los sospechosos restantes es el criminal), de donde se tiene:

$C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 + 1 = 2^4 = 16$ posibilidades (alternativas o resultados), resultantes de una sola entrada, para elegir, donde C_n^m significa combinaciones de *n* elementos tomados en grupos de *m* elementos, para números enteros $0 \le m \le n$.

Información indeterminada de nuevo, ya que:

$s_3 \ OR \ s_4$ significa: {s_3 sí, y s_4 no}, o {s_3 no, y s_4 sí}, o {s_3 sí, y s_4 sí},

por lo tanto, 3 posibles resultados (alternativos) de donde elegir.

De este modo, $F_3 : C \to P(S)$ es una función suave indeterminada (o renombrada/contratada como función suave indeterminada).

8. Extensión de valor de atributo indeterminado del Soft Set

Para extender las aplicaciones anteriores del Soft Set, siendo la multitud de sospechosos el conjunto $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\} \cup \{\phi\}$, donde $\{\phi\}$ es el elemento vacío (nulo), y el atributo *c = criminal*, pero el atributo *c* tiene esta vez

tres valores de atributo *K = {sí, no, tal vez},* como en la nueva rama de la filosofía, llamada Neutrosofía, donde entre los opuestos <*A*> = *sí*, y <*antiA*> = *no*, existe la indeterminación (o neutral) <*neutA*> = *tal vez*.

Y esto lo proporciona el testigo W_4 y se define como:

$F_4 : K \to P(S)$

Por ejemplo: F_4*(tal vez)* = s_5, lo que significa que el criminal es tal vez s_5.

También hay cierta indeterminación aquí porque el valor del atributo "tal vez" significa algo inseguro o incierto.

Se puede transformar este en un Soft Set Difuso (o Intuicionista Difuso, o Neutrosófico, u otra extensión Difusa) de las siguientes maneras:

F_4*(quizás)* = s_5 es aproximadamente equivalente a F_4*(sí)* = s_5 *(algún grado de pertenencia)*

o

F_4*(quizás)* = s_5 es aproximadamente equivalente a *F4(no)* = s_5 *(algún grado de no pertenencia)*

Considerando el siguiente ejemplo.

El *Soft Set Difuso* como:

F_4*(quizás)* = s_5 es aproximadamente equivalente a F_4*(sí)* = s_5*(0,6)*, o la probabilidad de que s_5 sea un criminal es del 60%;

El *Soft Set Intuicionista Difuso* como:

F_4*(quizás)* = s_5 es aproximadamente equivalente a F_4*(sí)* = s_5*(0,6, 0,3)*, o la probabilidad de que s_5 sea un criminal es del 60 %, y la probabilidad de que s_5 no sea un criminal es del 30 %;

El *Soft Set Neutrosófico* como:

F_4*(quizás)* = s_5 es aproximadamente equivalente a F_4*(sí)* = s_5*(0.6, 0.2, 0.3)*, o la posibilidad de que s_5 sea un criminal es del 60 %, la posibilidad indeterminada de que no sea un criminal es del 20 % y la posibilidad de que s_5 no sea un criminal es 30%.

Y de manera similar para otros *Soft Sets de Extensión Difusa*.

O, de manera equivalente, empleando el valor de atributo “no”, se puede considerar:

El *Soft Set Difuso* como:

F_4*(quizás)* = s_5 es aproximadamente equivalente a F_4*(no)* = s_5*(0.4)*, o la probabilidad de que s_5 no sea un criminal es del 40%;

El *Soft Set Intuicionista Difuso* como:

F_4*(quizás)* = s_5 es aproximadamente equivalente a F_4*(no)* = s_5*(0.3, 0.6)*, o la probabilidad de que s_5 no sea un criminal es del 30 %, y la probabilidad de que s_5 sea un criminal es del 60 %;

El *Soft Set Neutrosófico* como:

F_4*(quizás)* = $s_5$es aproximadamente equivalente a F_4*(no)* = s_5*(0.3, 0.2, 0.6)*, o la probabilidad de que s_5 no sea un criminal es del 30%, la probabilidad indeterminada de criminal-no criminal es del 20% y la probabilidad de que s_5 sea un criminal es 60%.

Y de manera similar para otros *Soft Sets de Extensión Difusa*.

9. Conjunto HyperSoft

Smarandache extendió en 2018 el Soft Set al Conjunto HyperSoft [3, 4] transformando la función F de una función uni-atributo en una función multi-atributo.

9.1. Definición de Conjunto HyperSoft

Sea $\mathcal{U}$ un universo de discurso, H un conjunto no vacío incluido en U, y $\mathrm{P}(H)$ el conjunto potencia de H. Sea $a_1, a_2, \dots a_n$, donde $n \geq 1$, n atributos distintos, cuyos valores de atributo correspondientes sean respectivamente los conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$, con $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Entonces el par $(F, A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n)$, donde $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ representa un producto Cartesiano, con

$F\colon A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow P(H)$

se llama Conjunto HyperSoft.

Por ejemplo,

sea

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

entonces

$$F(e_1, e_2, \dots, e_n) = G \in P(H)$$

9.2. Clasificación de conjuntos HyperSoft

Con respecto a los tipos de conjuntos, tales como: clásico, difuso, intuicionista difuso, neutrosófico, plitogénico y todos los demás conjuntos de extensión difusa, se tienen respectivamente: Conjunto HyperSoft Clásico, Conjunto HyperSoft Difuso, Conjunto HyperSoft Intuicionista Difuso, Conjunto HyperSoft Neutrosófico, Conjunto HyperSoft plitogénico y todos los demás conjuntos HyperSoft de extensión difusa [3, 5-9].

Los grados HyperSoft de T = verdad, I = indeterminación, F = falsedad, H = indecisión, N = neutralidad, etc. asignados a estos Conjuntos HyperSoft Clásicos, Conjuntos HyperSoft Difusos, Conjuntos HyperSoft Intuicionista Difusos, Conjuntos HyperSoft Neutrosóficos, Conjuntos HyperSoft Plitogénicos y todos los demás conjuntos HyperSoft de extensión difusa verifican las mismas condiciones de inclusión y desigualdades que en sus correspondientes conjuntos difusos y de extensión difusa.

9.3. Aplicaciones de Conjunto HyperSoft y su correspondiente Conjunto HyperSoft Difuso / Intuicionista Difuso / Neutrosofico.

Sea $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ un conjunto de cuatro casas y dos atributos:

s= tamaño, cuyos valores de atributo son *S = {pequeña, mediana, grande}*,

y *l = ubicación*, cuyos valores de atributo son *L = {central, periférica}*.

Entonces $F: S \times L \rightarrow P(H)$ es un Conjunto HyperSoft.

i. Por ejemplo, *F(pequeña, periférica) =* $\{h_2, h_3\}$, lo que significa que las casas que son *pequeñas y periféricas* son h_2 y h_3.
ii. Un Conjunto HyperSoft Difuso puede asignar algunos grados difusos, por ejemplo:
F(pequeña, periférica) = {h2(0.7), h3(0.2)}, lo que significa que con respecto a los valores de los atributos *pequeña y periférica* en conjunto, h_2 cumple con los requisitos de ser tanto pequeña como periférica en un grado difuso del 70%, mientras que h_3 en un grado difuso del 20%.
iii. Subsecuentemente, un Conjunto HyperSoft Intuicionista Difuso puede asignar algunos grados intuicionistas difusos, por ejemplo:
F(pequeña, periférica) = {h2(0.7, 0.1), h3(0.2, 0.6)}, lo que significa que con respecto a los valores de los atributos *pequeña y periférica* en conjunto, h_2 cumple con los requisitos de ser tanto pequeña como periférica en un grado difuso intuicionista del 70%, y no lo cumple en un grado difuso intuicionista del 10%; y de manera similar para h_3.
iv. Asimismo, un Conjunto HyperSoft Neutrosófico puede asignar algunos grados neutrosóficos, por ejemplo:

F(pequeña, periférica) = {h2(0.7, 0.5, 0.1), h3(0.2, 0.3, 0.6)}, lo que significa que con respecto a los valores de los atributos *pequeña y periférica* en conjunto, h_2 cumple con los requisitos de ser pequeña y periférica en un grado neutrosófico del 70%, el requisito indeterminado en un grado neutrosófico del 50%, y no cumple el requerimiento en un grado neutrosófico del 10%. Y de manera similar, para h_3.

v. Del mismo modo para otros Conjuntos HyperSoft de extensión difusa.

10. Operador, NeutroOperador, AntiOperador

Sea U un universo de discurso y H un subconjunto no vacío de U.
Sea $n \geq 1$ un número entero, y ω un operador definido como:
$\omega : H^n \to H$
Tomando una *n-tupla aleatoria* $(x_1, x_2, ..., x_n) \in H^n$.
Hay tres casos posibles:

i. $\omega(x_1, x_2, ..., x_n) \in H$ y $\omega(x_1, x_2, ..., x_n)$ es una salida determinada (clara, cierta, única); esto se llama grado bien definido (definido internamente), o grado de Verdad (*T*).
ii. $\omega(x_1, x_2, ..., x_n)$ es una salida indeterminada (poco clara, incierta, indefinida, no única); esto se llama grado de Indeterminación (*I*).
iii. $\omega(x_1, x_2, ..., x_n) \in U - H$; esto se denomina grado de definición externa (ya que la salida está fuera de H), o grado de falsedad (*F*).

En consecuencia, se tiene una Tripleta Neutrosófica de la forma

<Operador, NeutroOperador, AntiOperador>

definida como sigue [12, 13, 14]:

10.1. Operador (clásico)

Para cualquier *n-tupla* $(x_1, x_2, ..., x_n) \in H^n$, se tiene que $\omega(x_1, x_2, ..., x_n) \in H$ y $\omega(x_1, x_2, ..., x_n)$ es una salida determinada (clara, cierta, única). Por lo tanto (T, I, F) = (1, 0, 0).

10.2. NeutroOperador

Hay algunas *n-tuplas* $(x_1, x_2, ..., x_n) \in H^n$ tales que $\omega(x_1, x_2, ..., x_n) \in H$ y $\omega(x_1, x_2, ..., x_n)$ son salidas determinadas (claras, ciertas, únicas) (grado de verdad T);

otras *n-tuplas* $(y_1, y_2, ..., y_n) \in H^n$ tales que $\omega(y_1, y_2, ..., y_n) \in H$ y $\omega(y_1, y_2, ..., y_n)$ son salidas indeterminadas (poco claras, inciertas, no únicas) (grado de indeterminación I);

y otras *n-tuplas* $(z_1, z_2, ..., z_n) \in H^n$ tales que $\omega(z_1, z_2, ..., z_n) \in U - H$ (grado de falsedad F);

donde $(T, I, F) \neq \{(1,0,0), (0,0,1)\}$ que representan respectivamente el primer (Operador Clásico) y el tercer caso (AntiOperador).

10.3. AntiOperador

Para cualquier *n-tupla* $(x_1, x_2, ..., x_n) \in H^n$, se tiene $\omega(x_1, x_2, ..., x_n) \in U - H$. Por lo tanto
(V, I, F)= (0, 0, 1).

11. Casos Particulares de Operadores

11.1. Operador determinado

Un *Operador Determinado* es un operador cuyo grado de indeterminación $I = 0$, mientras que el grado de verdad $T = 1$ y el grado de falsedad $F = 0$.

Por tanto, sólo el Operador Clásico es un Operador Determinado.

11.2. IndetermOperator

Como subclase del NeutroOperator anterior, existe el IndetermOperator (Operador indeterminado), que es un operador que tiene cierto grado de indeterminación (I > 0).

12. Aplicaciones de los IndetermOperators a los Soft Sets

Sea H un conjunto de número finito de casas (o, en general, objetos, artículos, etc.):

$H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\} \cup \{\emptyset\}, 1 \leq n < \infty$,

donde h_1 = casa1, h_2 = casa2, etc.

y $\emptyset$ es el elemento vacío (o nulo) (ninguna casa).

13. Operadores Soft determinados e indeterminados

Se definen cuatro operadores Soft en H.

13.1. joinAND

joinAND, o juntos, denotado por ⩓, definido como:

x ⩓ y = x e y, o sumando x e y; aquí la conjunción "and" tiene el sentido común del lenguaje natural.

x ⩓ $y = \{x, y\}$ es un conjunto de dos objetos.

Por ejemplo:

h_1 ⩓ h_2 = *casa1* ⩓ *casa2 = casa1 y casa2*

= juntar *casa1* y *casa2 = {casa1, casa2}* = $\{h_1, h_2\}$.

joinAND es un Operador Soft Determinado ya que se obtiene una salida clara (cierta).

13.2. disjoinOR

disjoinOR, o separados en partes, denotado por ⩔, definido como:

x disjoinOR $y = x$ ⩔ $y = \{x\}$, o $\{y\}$, o ambos$\{x, y\}$

= x, o y, o ambos x e y;

aquí, igualmente, la disyunción "or" (y la conjunción "and" también) tienen el sentido común del lenguaje natural.

Pero existe cierta indeterminación (incertidumbre) para elegir entre tres alternativas.

Por ejemplo:

h_1 ⩔ h_2 = *casa1* ⩔ *casa2 = casa1, o casa2*, o ambas casas juntas *{casa1 y casa2}*.

disjoinOR es un Operador IndetermSoft, ya que no tiene una salida única clara, sino tres posibles salidas alternativas a elegir.

13.3. exclusiveOR

exclusiveOR, que significa uno u el otro; es un Operador IndetermSoft (a elegir entre dos alternativas).

$h_1 ⩔_E h_2$ = ya sea h_1 o h_2, y no ambos $\{h_1, h_2\}$.

13.4. NOT

NOT, o no, o subnegación/subcomplemento, indicado por ⫬ , donde

NOT(h) =⫬ $h = no\ h$, en otras palabras, todos los elementos de H, excepto h, ya sea elementos individuales, o dos elementos, …, o $n-1$ elementos de $H-\{h\}$, o el elemento vacío $\emptyset$.

La negación del "no" tiene el sentido común del lenguaje natural; cuando se dice "no Juan" eso significa "alguien más" o "muchos otros".

13.4.1. Teorema 1

Sea $|H - \{h\}| = m \geq 1$ el cardinal del conjunto *H-{h}*.

Entonces $NOT(h) = \{x, x \in P(H-\{h\})\}$ y el cardinal $|NOT(h)| = 2^{n-1}$.

Prueba:

Ya que NOT(H) significa todos los elementos de H, excepto h,

ya sea por elementos simples, o por dos elementos, …, o por $n-1$ elementos de $H-\{h\}$, o el elemento vacío $\emptyset$, entonces se obtiene:

$C_{n-1}^{1} + C_{n-1}^{2} + \cdots + C_{n-1}^{n-1} + 1 = (2^{n-1} - 1) + 1 = 2^{n-1}$ posibilidades (alternativas de h).

El operador NOT tiene como salida una multitud de subnegaciones (o subcomplementos).

NOT también es un Operador IndetermSoft.

13.4.2. Ejemplo

Sea $H = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Entonces,

NOT(x₁) = ⫬ x_1 = ya sea x_2, o x_3, o x_4,
o $\{x_2, x_3\}$, o $\{x_2, x_4\}$, o $\{x_3, x_4\}$,
o $\{x_2, x_3, x_4\}$,
o $\emptyset$;

por lo tanto $C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 + 1 = 3 + 3 + 1 + 1 = 8 = 2^3$ posibilidades/alternativas.

Representaciones gráficas:

$$\neg x_1 = \; x_2;\ x_3;\ x_4;\ \{x_2, x_3\};\ \{x_2, x_4\};\ \{x_3, x_4\};\ \{x_2, x_3, x_4\};\ \emptyset$$

U otra representación (equivalente a la anterior) es la siguiente:

$$\neg x_1 = \begin{cases} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \{x_2, x_3\} \\ \{x_2, x_4\} \\ \{x_3, x_4\} \\ \{x_2, x_3, x_4\} \\ \phi \end{cases}$$

El operador NOT es equivalente a $(2^{n-1} - 1)$ disyunciones OR (del lenguaje natural).

14. Similitudes entre Operadores IndetermSoft y Operadores Clásicos

(i) joinAND es similar al operador AND lógico clásico ($\wedge$) de la siguiente manera.
Sean *A*, *B*, *C* proposiciones, donde $C = A \wedge B$.
Entonces la proposición *C* es verdadera, si ambos: *A* = verdadero y *B* = verdadero.
(ii) disjoinOR también es similar al operador lógico clásico OR ($\vee$) de la siguiente manera.
Sean *A*, *B*, *D* proposiciones, donde $D = A \vee B$.
Entonces la proposición D es verdadera si:
ya sea *A* = verdadero,
o *B* = verdadero,
o ambos *A* = verdadero y *B* = verdadero
(por lo tanto, se tienen tres posibilidades).
(iii) exclusiveOR también es similar al operador OR exclusivo de lógica clásica ($\vee_E$) de la siguiente manera.
Sean *A*, *B*, *D* proposiciones, donde *D* = $A \vee_E B$
Entonces la proposición *D* es verdadera si:
ya sea A = verdadero,
o B = verdadero,
y tanto A como B no son verdaderos simultáneamente
(por lo tanto, se tienen dos posibilidades).
(iv) NOT se parece al operador de conjunto clásico, o complemento ($\neg$), de la siguiente manera.
Sean *A*, *B*, *C*, *D* cuatro conjuntos, cuyas intersecciones de dos en dos son vacías, del universo del discurso $\mathcal{U} = A \cup B \cup C \cup D$.
Entonces $\neg A = NotA = \mathcal{U} \setminus A =$ el complemento de A con respecto a $\mathcal{U}$.
Si bien tiene solo una salida exacta ($\mathcal{U} \setminus A$) en la teoría clásica de conjuntos, el operador NOT (⫬ A) tiene 8 resultados posibles: el conjunto vacío ($\emptyset$), o *B*, o *C*, o *D*, o $\{B, C\}$, o $\{B, D\}$, o $\{C, D\}$, o $\{B, C, D\}$.

15. Propiedades de los Operadores

Sea $x, y, z \in$ H(⩓,⩔, ⩔$_E$, ⫬).

15.1. Operadores bien definidos

Considerando el conjunto H cerrado bajo estos cuatro operadores: H(⩓,H⩔, ⩔E,⫬).
Por lo tanto, para cualquier $x, y \in H$ se tiene:
x ⩓ y ∈ H(⩓,⩔, ⩔$_E$, ⫬), ya que $\{x, y\} \in H$(⩓,⩔, ⩔$_E$, ⫬),
y x ⩔ y ∈ H(⩓,⩔, ⩔$_E$, ⫬), ya que cada $\{x\}$, $\{y\}$, $\{x, y\} \in H$(⩓,⩔, ⩔$_E$, ⫬),
además x ⩔$_E$ y ∈ H(⩓,⩔, ⩔$_E$, ⫬), ya que cada $\{x\}$, $\{y\} \in H$(⩓,⩔, ⩔$_E$, ⫬),

Entonces el operador NOT también está bien definido porque es equivalente a un múltiplo de los operadores disjoinOR.

De este modo:
⩓ : $H^2 \rightarrow H$(⩓,⩔, ⩔$_E$, ⫬)
⩔ : $H^2 \rightarrow H$(⩓,⩔, ⩔$_E$, ⫬)
⩔$_E$: $H^2 \rightarrow H$(⩓,⩔, ⩔$_E$, ⫬)
⫬ : $H \rightarrow H$(⩓,⩔, ⩔$_E$, ⫬)

15.2. Conmutatividad

$x ⩓ y = y ⩓ x$, y $x ⩔ y = y ⩔ x$, y $x ⩔_E y = y ⩔_E x$

Prueba

$x ⩓ y = \{x, y\} = \{y, x\} = y ⩓ x$

$x ⩔ y = (\{x\}, \text{o } \{y\}, \text{o } \{x, y\}) = (\{y\} \text{ o } \{x\}, \text{o } \{y, x\}) = y ⩔ x$

$x ⩔_E y$ = (ya sea $\{x\}$, o $\{y\}$, pero no ambos x e y) =

= (ya sea $\{y\}$, o $\{x\}$, pero no ambos y y x) = $y ⩔_E x$.

15.3. Asociatividad

$x ⩓ (y ⩓ z) = (x ⩓ y) ⩓ z$,

y $x ⩔ (y ⩔ z) = (x ⩔ y) ⩔ z$, y $x ⩔_E (y ⩔_E z = (x ⩔_E y) ⩔_E z$

Prueba

$$x ⩓ (y ⩓ z) = \{x, y ⩓ z\} = \{x, \{y, z\}\}$$
$$= \{x, y, z\} = \{\{x, y\}, z\}$$
$$= (x ⩓ y) ⩓ z.$$

$$x ⩔ (y ⩔ z) = (x ⩔ y) ⩔ z$$

$$x \text{ o } (y \text{ o } z) = x \text{ o} \begin{cases} y \\ z \\ y \text{ o } z \end{cases} = x \text{ o} \begin{cases} y \\ z \\ y \text{ o } z \begin{cases} y \\ z \\ \{y, z\} \end{cases} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x \text{ o } y = \begin{cases} x \\ y \\ \{x, y\} \end{cases} \\ x \text{ o } z = \begin{cases} x \\ z \\ \{x, z\} \end{cases} \\ \begin{cases} x \text{ o } y \\ x \text{ o } z \\ x \text{ o } \{y, z\} = \begin{cases} x \\ \{y, z\} \\ \{x, y, z\} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$= x, y, z, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}.$$

$$(x \text{ o } y) \text{ o } z = \begin{cases} x \\ y \\ \{x, y\} \end{cases} \text{o } z = \begin{cases} x \text{ o } z \begin{cases} x \\ z \\ \{x, z\} \end{cases} \\ y \text{ o } z \begin{cases} y \\ z \\ \{y, z\} \end{cases} \\ \{x, z\} \text{ o } z \begin{cases} \{x, y\} \\ z \\ \{x, y, z\} \end{cases} \end{cases}$$

$$= x, y, z, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}.$$

Por lo tanto, *(x o y) o z = x o (y o z) = x, y, z, {x, y}, {y, z}, {z, x}, {x, y, z}* con $2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$ posibilidades.

$x ⩔_E (y ⩔_E z) =$

ya sea x, o (y $\veebar_E$ *z), y no ambos x y (y* $\veebar_E$ *z) = ya sea x, o (y, o z, y no ambos y y z), y no ambos x y (no y o z) = ya sea x, o y, o z, y no ambos {y, z}, y (no x y no (no y o z)) = ya sea x, o y, o z, y no {y, z}, no {x, y}, no {x, z} = (x* $\veebar_E$ *y)* $\veebar_E$ *z*

15.4. Distributividad de joinAND con respecto a disjoinOR y exclussiveOR

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Prueba

$x \wedge (y \vee z) = x$ y $(y$ o $z) = x$ y $(y,$ or $z,$ or $\{y, z\})$
= x e y, o x y z, o x y $\{y, z\}$
= $\{x, y\}$, o $\{x, z\}$, o $\{x, y, z\}$
= $\{z, y\}$, $\{x, z\}$, $\{x, y, z\}$.
$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = \{x, y\}$
o $\{x, z\} = \{x, y\}, \{x, z\}, \{x, y, x, z\} = \{x, y\}, \{x, z\}, \{x, y, z\}$.

x $\wedge$ *(y* $\veebar_E$ *z) = x y (ya sea y, o z, y no ambos {y, z}) = ya sea x e y, o x y z,*
y x y no ambos {y, z} = ya sea {x, y}, o {x, z}, y {x, no {y, z} } =
= ya sea {x, y}, o {x, z}, y no {x, y, z} = (x $\wedge$ *y)* $\veebar_E$ *(x* $\wedge$ *z)*

15.5. No distributividad de disjoinOR y exclussiveOR con respecto a joinAND

$x \vee (y \wedge z) \neq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
$x \vee (y \wedge z) = x$ o $(y$ y $z) = x$ o $\{y, z\} = x, \{y, z\}, \{x, y, z\}$

Pero
$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x, y, \{x, y\})$ y $(x, z, \{x, z\})$
= $\{x, x\}$, $\{x, z\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$, $\{y, x\}$, $\{x, y, z\}$, $\{x, y\}$, $\{x, y, z\}, \{x, y, z\}$
= $x, \{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$, $\{x, y, z\}$.
De donde en general $x, \{y, z\}, \{x, y, z\} \neq x, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}$.
Mientras que en el Álgebra Booleana clásica la distribución de or con respecto a and es válida:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

x $\veebar_E$ *(y* $\wedge$ *z) = ya sea x, o {y, z}, y no {x, y, z}* $\neq$
$\neq$ *(x* $\veebar_E$ *y)* $\wedge$ *(x* $\veebar_E$ *y) = (ya sea x, o y, y no {x, y}) y (no x, o z, y no {x, z})*

15.6. Idempotencia

$x \wedge x = \{x, x\} = x$
$x \vee x =$ ya sea x, o x, o $\{x, x\}$
= x, o x, o x
= x.
$x \veebar_E x$ = ya sea x, o x, y no $\{x, x\}$ = imposible.

15.6.1. Teorema 2

Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (H, \wedge, \vee, \neg)$, para $n \geq 2$. Entonces:
(i) $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$,
y
(ii) $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n = x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}$, …, $\{x_{n-1}, x_n\}$,
$\{x_1, x_2, x_3\}$, …
… … … … … …
$\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$, …
$\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$.
Existen: $C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n - 1$ posibilidades/alternativas.
Cuanto mayor es *n*, mayor es la indeterminación.
((iii) $x_1 \veebar_E x_2 \veebar_E \ldots \veebar_E x_n = x_1, x_2, \ldots, x_n =$
$=$ *ya sea* x_1, *o* x_2, *…, o* x_n,
y no dos o más variables sean verdaderas simultáneamente.
Existen: $C_n^1 = n$ posibilidades.
Cuanto mayor sea *n*, mayor es la indeterminación por haber muchas alternativas.
Prueba
(i) La igualdad joinAND es obvia.
(ii) La disjoinOR resulta del hecho de que para que la disyunción de *n* proposiciones sea verdadera, basta con tener al menos una que sea verdadera. Como tal, se puede tener solo una proposición verdadera, o solo dos proposiciones verdaderas, y así sucesivamente, solo $n - 1$ proposiciones verdaderas, hasta todas las *n* proposiciones verdaderas.
(iii) Es obvio.

15.7. Ley clásica de Absorción Booleana 1

$x \wedge (x \vee y) = x$ no funciona en esta estructura, ya que $x \Cap (x \Cup y) \neq x$.
Prueba
$x \Cap (x \Cup y) \quad = x$ y $(x$ o $y)$
$= x \text{ y} \begin{cases} x \\ y \\ \{x, y\} \end{cases}$
$= \{x, x\}$ o $\{x, y\}$ o $\{x, x, y\}$
$= x$ o $\{x, y\}$ o $\{x, y\}$
$= x$ o $\{x, y\}$
$= \begin{cases} x \\ \{x, y\} \\ \{x, x, y\} \end{cases} = \begin{cases} x \\ \{x, y\} \\ \{x, y\} \end{cases} = \begin{cases} x \\ \{x, y\} \end{cases} \neq x.$

Pero esto si funciona:
$x \Cap$ (x $\veebar_E$ y) = *x y (ya sea x, o y, y no {x, y}) =*
= (x y x), o (x e y), y (x y no {x, y}) = x.

15.8. Ley clásica de Absorción Booleana 2

$x \vee (x \wedge y) = x$ no funciona en esta estructura, ya que $x \Cup (x \Cap y) \neq x$.
Prueba
$x \Cap (x \Cup y) = x$ y $(x$ o $y)$
x or (x e y) = x or $\{x, y\}$
$= \begin{cases} x \\ \{x, y\} \\ \{x, x, y\} \end{cases} = \begin{cases} x \\ \{x, y\} \\ \{x, y\} \end{cases}$
$= \begin{cases} x \\ \{x, y\} \end{cases} \neq x.$
Pero esto si es válido:
x $\veebar_E$ *(x* $\Cap$ y *)* = (ya sea x), o {x, y}, y (no {x, y}) = x.

15.9. Aniquiladores e Identidades para el Álgebra IndetermSoft

Mientras que 0 es un aniquilador para la conjunción ∧ en el Álgebra Booleana clásica, $x \wedge 0 = 0$, en el Álgebra IndetermSoft ∅ es una identidad para ⩓, mientras que para los demás no funciona.

Prueba

$x ⩓ \emptyset = x$ y ∅

= x y nada

= x junto con nada

= x.

15.10. ∅ no es una identidad, ni un aniquilador para disjoinOR ni para exclusiveOR

Mientras que 0 es una identidad para el ∨ en el álgebra booleana clásica, $x \vee 0 = x$, en IndetermÁlgebra, ∅ no es ni una identidad ni un aniquilador.

Prueba

$x ⩔ \emptyset = x$, o (nada), o $\emptyset\{x, \emptyset\}$

= x, o ∅, or x

= x, o ∅.

x $⩔_E$ ∅ = ya sea x, o ∅, y no {x, ∅}.

15.11. La negación de ∅ tiene múltiples soluciones

Mientras que en el álgebra booleana clásica la negación de 0 es 1 (una sola solución), $\neg 0 = 1$, en IndetermAlgebra la negación de ∅ tiene múltiples soluciones.

Prueba

$⫬ \emptyset = NOT(\emptyset)$,

= no nada

= uno o más elementos del conjunto sobre el que se define el operador ⫬.

Ejemplo

Sea $H = \{x_1, x_2, x_3\} \cup \emptyset$.

Entonces, $⫬ \emptyset = x_1$, o x_2, o x_3, o $\{x_1, x_2\}$, o $\{x_1, x_3\}$, o $\{x_2, x_3\}$, o $\{x_1, x_2, x_3\}$,

por lo tanto 7 soluciones alternativas.

15.12. La Doble Negación no es válida en el Algebra IndetermSoft

Mientras que en el Álgebra Booleana clásica es válida la Ley de la Doble Negación: $\neg(\neg x) = x$, en el IndetermÁlgebra no ocurre así:

En general, $⫬ (⫬ x) \neq x$.

Prueba

Un contraejemplo:

Sea $H = \{x_1, x_2, x_3\} \cup \emptyset$.

$⫬ x_1 =$ lo que no es x_1o no contiene x_1

= x_2, x_3, $\{x_2, x_3\}$, ∅.

Así se tienen 4 valores diferentes de la negación de x_1.

Eligiendo $⫬ x_1 = x_2$; entonces $⫬ (⫬ x_1) = x_2 = (x_1, x_3, \{x_1, x_3\}, \emptyset) \neq x_1$.

De manera similar para tomar otros valores de $⫬ x_1$.

Sea $H = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cup \emptyset$, $n \geq 2$. Sea $x \in H$.

Elementos mínimos y máximos con respecto a la relación de inclusión son:

$\emptyset =$ el elemento vacío (nulo) y respectivamente

$x_1 \Cap x_2 \Cap \dots \Cap x_n \overset{notation}{=} \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = H,$

pero en el Álgebra Booleana son 0 y 1 respectivamente.

15.13. Todo el conjunto H es un aniquilador para joinAND

Mientras que en el Álgebra Booleana clásica la identidad para $\wedge$ es 1, ya que $x \wedge 1 = x$, en el Álgebra IndetermSoft para $\Cap$ hay un aniquilador H, ya que $x \Cap H = H$, dado que $x \Cap H = \{x_1, x_2, \dots, x_n, x\} = H$, porque $x \in H$ entonces x es uno de $x_1, x_2, \dots, x_n$.

16. El máximo (*H*) no es ni aniquilador ni identidad

Mientras que en el Álgebra Booleana clásica el aniquilador para $\vee$ es 1, porque $x \vee 1 = 1$, en el Álgebra IndetermSoft para $\Cup$ el máximo H no es ni aniquilador ni identidad,

$x \Cup H = x$ o $H = x, H, \{x, H\} = x, H, H = x, H.$

x $\Cup_E$ *H = ya sea x, o H, y (no x y no H).*

17. Complementación1

En el Álgebra Booleana clásica, Complementación1 es: $x \wedge \neg x = 0$.

En el Álgebra IndetermSoft, $x \Cap (\neg x) \neq \emptyset$, y $x \Cap (\neg x) \neq H$.

Contraejemplo

$MM = \{x_1, x_2, x_3\} \cup \emptyset$

$\neg x_1 = x_2, x_3, \{x_2, x_3\}, \emptyset$

$x_1 \Cap (\neg x_1) = x_1 \Cap (x_2, x_3, \{x_2, x_3\}, \emptyset) =$

$= (x_1$ y $x_2)$ o $(x_1$ o $x_3)$

o $(x_1$ y $\{x_2, x_3\})$

o $(x_1$ y $\emptyset) =$

$= (x_1, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}) \neq \emptyset \neq M.$

18. Complementación2

En el Álgebra Booleana clásica, Complementación2 es: $x \vee \neg x = 1$.

En el Álgebra IndetermSoft, $x \Cup \neg x \neq H$, y $x \Cup \neg x \neq \emptyset$.

Contraejemplo

Lo anterior $H = \{x_1, x_2, x_3\} \cup \emptyset$

y $\neg x_1 = x_2, x_3, \{x_2, x_3\}, \emptyset$ entonces

$$x_1 \Cup \neg x_1 = x_1 \Cup (x_2, x_3, \{x_2, x_3\}, \emptyset) = \begin{cases} x_1 \\ x_2, x_3, \{x_2, x_3\}, \emptyset \\ x_1, x_2, x_3, \{x_2, x_3\}, \emptyset \end{cases}$$

$= x_1,$ or $(x_2, x_3, \{x_2, x_3\}, \emptyset),$ or $(x_1, x_2, x_3, \{x_2, x_3\}, \emptyset)$

lo cual es diferente de H y de $\emptyset$.

Y:

$$x_1 \Cup_E \neg x_1 = x_1 \Cup_E (x_2, x_3, \{x_2, x_3\}, \emptyset) = \left\{ \begin{matrix} x_1 \\ x_2, x_3, \{x_2, x_3\}, \phi \end{matrix} \right\} \text{ y no } (x_1, x_2, x_3, \{x_2, x_3\}, \phi),$$

lo cual es diferente de H y de $\emptyset$.

19. Primera Ley de De Morgan en el Álgebra IndetermSoft

La Primera Ley de De Morgan del álgebra booleana clásica es:

$\neg(x \vee y) = (\neg x) \wedge (\neg y)$
eso también es cierto en el Álgebra IndetermSoft:
$\eqcirc (x \Cup y) = (\eqcirc x) \Cap (\eqcirc y)$
Prueba
$\eqcirc (x \Cup y) =\eqcirc (x, \text{o } y, \text{o } \{x \text{ e } y\})$
$=\eqcirc x, \text{y} \eqcirc y, \text{y} \eqcirc \{x_1 \text{ e y}\}$
$=\eqcirc x_1, \text{y} \eqcirc y, \text{y} (\eqcirc x, \text{o} \eqcirc \text{y})$
$=\eqcirc x, \text{y} \eqcirc y$
$= (\eqcirc x) \Cap (\eqcirc y).$
Ejemplo
$M = \{x_1, x_2, x_3\} \cup \emptyset$
$\eqcirc (x_1 \Cup x_2) \quad =\eqcirc (x_1, \text{o } x_2, \text{o } \{x_1 \text{ y } x_2\})$
$=\eqcirc x_1, \text{y} \eqcirc x_2, \text{y} (\eqcirc x_1 \text{ or } \eqcirc x_2)$
$=\eqcirc x_1, \text{y} \eqcirc x_2$
$= (\eqcirc x_1) \Cap (\eqcirc x_2).$
$\eqcirc x_1 = (x_2, x_3, \{x_2, x_3\}, \emptyset)$
$\eqcirc x_2 = (x_1, x_3, \{x_1, x_3\}, \emptyset)$
$(\eqcirc x_1) \Cap (\eqcirc x_2) = (x_2, x_3, \{x_2, x_3\}, \emptyset) \Cap (x_1, x_3, \{x_1, x_3\}, \emptyset)$
$=x_1, x_2, x_3, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \emptyset.$

20. Segunda Ley de De Morgan en el Álgebra IndetermSoft

La Segunda ley de De Morgan en el álgebra booleana clásica es

$\neg(x \wedge y) = (\neg x) \vee (\neg y)$

también es cierto en la nueva estructura llamada Álgebra IndetermSoft:

$\eqcirc (x \Cap y) = (\eqcirc x) \Cup (\eqcirc y)$
Prueba
$\eqcirc (x \Cap y) =\eqcirc (\{x \text{ e } y\}) = \eqcirc x, \text{o } \eqcirc y, o \{\eqcirc x, e \eqcirc y\} = (\eqcirc x) \Cup (\eqcirc y)$

Ejemplo
$\eqcirc (x_1 \Cap x_2) \quad =\eqcirc (\{x_1, x_2\})$
$= \left(\eqcirc x_1, o \eqcirc x_2, \text{o } (\eqcirc x_1 \text{ y} \eqcirc x_2)\right)$
$= (x_2, x_3, \{x_2, x_3\}, \emptyset)=$
$\text{o}(x_2, x_3, \{x_2, x_3\}, \emptyset)$
$\text{o}(x_1, x_3, \{x_1, x_3\}, \emptyset)$
$\text{o}(x_1, x_2, x_3, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \emptyset) =$
$= (x_1, x_2, x_3, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \emptyset)$
$(\eqcirc x_1) \Cup (\eqcirc x_2) =\eqcirc x_1, \text{o}\eqcirc x_2 \text{ o } (\eqcirc x_1 \Cap \eqcirc x_2) =$
$(x_2, x_3, \{x_2, x_3\}, \emptyset)$
$\text{o}(x_1, x_3, \{x_1, x_3\}, \emptyset)$
$\text{o}(x_1, x_2, x_3, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \emptyset)$
$= (x_1, x_2, x_3, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \emptyset)$
$=\eqcirc (x_1 \Cap x_2)$

*

Este Álgebra IndetermSoft no es un Álgebra Booleana porque muchas de las Leyes Booleanas no se cumplen, como por ejemplo:

- Identidad para ⩕
- Identidad para ⩔
- Identidad para ⩔E
- Aniquilador para ⩕
- Aniquilador para ⩔
- Aniquilador para ⩔E
- Absorción1 [x ⩕ (x ⩔ y) = x]
- Absorción2 [x ⩔ (x ⩕ y) = x]
- Doble negación
- Complementación1 [x ⩕ ⫬ $x = \emptyset$]
- Complementación2 { [x ⩔ ⫬ $x = H$] y [x ⩔E ⫬ $x = H$] }

21. Aplicaciones prácticas del Soft Set e IndetermSoft Set

Sea $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ un conjunto de cuatro casas, y el atributo *a = color*, cuyos valores son *A = {blanco, verde, azul, rojo}*.

21.1. Conjunto Soft

La función
$F: A \rightarrow \mathcal{P}(H)$
donde $\mathcal{P}(H)$ es el conjunto potencia de H, se llama Soft Set clásico.
Por ejemplo,
F(blanco) = h_3, es decir, la casa h_3 está pintada de blanco;
F(verde) = $\{h_1, h_2\}$, es decir, ambas casas h_1 y h_2 están pintadas de verde;
F(azul) = h_4, es decir, la casa h_4 está pintada de azul;
F(rojo) = $\emptyset$, es decir, ninguna casa está pintada de rojo.
Por lo tanto, la información sobre los colores de las casas es conocida, cierta.

21.2. Conjunto IndetermSoft

Pero hay muchos casos en nuestra vida real cuando la información sobre los valores de los atributos de los objetos (o artículos, en general) es poco clara, incierta.

Es por eso que se necesita extender el Soft Set clásico (Determinado) a un Soft Set Indeterminado.
La función suave determinada (exacta)
$F: A \rightarrow \mathcal{P}(H)$
se extiende a una función suave indeterminada
$F: A \rightarrow H$(⩕,⩔, ⩔E,⫬),
dónde (⩕,⩔, ⩔E,⫬) es un conjunto cerrado bajo ⩕,⩔, ⩔E, y ⫬, y *f(x)* no siempre está determinada.
Por ejemplo,
F(blanco) = h_3 ⩔ h_4,
significa que las casas h_3 o h_4 son blancas, pero no hay certeza de cuál,
de donde uno tiene tres posibilidades/resultados/alternativas:
o $h_3$es blanco (y h_4 no lo es),
o h_4 es blanco (y h_3 no lo es),
o ambos h_3 y h_4 son blancos.
Esta es una información indeterminada.
También se puede simplemente escribir:

$$F\ (blanco) = \begin{cases} h_3 \\ h_4 \\ \{h_3, h_4\} \end{cases}$$

o F(blanco) = h_3, h_4, $\{h_3, h_4\}$,
donde $\{h_3, h_4\}$ significa $\{h_3$ y $h_4\}$,
que se lee como: o h_3, o h_4, o $\{h_3$ y $h_4\}$.

Otro ejemplo:
F(azul) = ⫤ h_2, o la casa h_2 no es azul,
por lo tanto, otras casas entre $\{h_1, h_3, h_4\}$ pueden ser azules,
o ninguna casa ($\emptyset$) puede ser azul.
Esta es otra información indeterminada.

La negación de h_2 (denotada como NOT(h_2) no es igual al complemento clásico de $C(h_2)$ del elemento h_2 con respecto al conjunto H, ya que
$C(h_2) = H \setminus \{h_2\} = \{h_1, h_3, h_4\}$,

pero puede ser cualquier subconjunto de $H \setminus \{h_2\}$, o cualquier subcomplemento de $C(h_2)$,
de nuevo muchos posibles resultados (en este ejemplo 8) para elegir:

⫤ h_2 $= h_1, h_3, h_4, \{h_1, h_3\}, \{h_1, h_4\}, \{h_3, h_4\}, \{h_1, h_3, h_4\}, \emptyset =$
= ya sea h_1o h_3 o h_4,
o $\{h_1$ y $h_3\}$, o $\{h_1$ y $h_4\}$, o $\{h_3$ y $h_4\}$
o $\{h_1$ y h_3 y $h_4\}$,
o $\emptyset$ (elemento nulo, es decir, ninguna otra casa es azul).

La negación (⫤ h_2) produce un mayor grado de indeterminación que las uniones anteriores: (h_3 ⩔ h_4) y respectivamente (h_3 ⩔$_E$ h_4).
La intersección (⩓) es un operador determinado (cierto).

Por ejemplo,
F(verde) = h_1 ⩓ h_2, que es igual a $\{h_1, h_2\}$, es decir, juntos, $\{h_1, h_2\}h_1$ y $h_2\{h_1$ and $h_2\}$.
Puede ocurrir una combinación de estos operadores, por lo que la función suave indeterminada (incierta) se vuelve más compleja.

Otro ejemplo.
F(verde) = h_1 ⩓ (⫤ h_4), donde por supuesto ⫤ $h_4 \neq h_1$, lo que significa que:
la casa $h_1$es verde,
y otras casas entre $\{h_2, h_3\}$ pueden ser azules,
o $\emptyset$ (ninguna otra casa es azul).
h_1 ⩓ (⫤ h_4) $= h_1$y (NOTh_4)

= h_1y $(h_1, h_2, h_3, \{h_1, h_2\}, \{h_1, h_3\}, \{h_2, h_3\}, \{h_1, h_2, h_3\}, \emptyset)$
[$h_1$se quita ya que ⫤ h_4 se supone que es diferente de h_1]
= h_1y$(h_2, h_3, \{h_2, h_3\}, \emptyset)$
= (h_1 y h_2)o(h_1 y h_3)
o(h_1 y $\{h_2, h_3\}$)
o$\emptyset$
= (h_1 y h_2) o (h_1 y h_3)o (h_1 y h_2 y h_3), $\emptyset$
$\overset{notation}{=}$ $\{h_1, h_2\}$, $\{h_1, h_3\}$, $\{h_1, h_2, h_3\}$, $\emptyset$

De este modo, hay 4 posibilidades.

22. Definiciones de <Álgebra, NeutroÁlgebra, AntiÁlgebra>

Sea $\mathcal{U}$ un universo de discurso, y H un conjunto no vacío incluido en $\mathcal{U}$. Además, H está dotado de algunas operaciones y axiomas.

22.1. Álgebra

Una estructura algebraica cuyas operaciones están bien definidas y todos los axiomas son totalmente ciertos se denomina estructura algebraica clásica (o álgebra). De donde *(T, I, F) = (1, 0, 0).*

22.2. NeutroÁlgebra

Si al menos una operación o un axioma tiene algún grado de verdad (T), algún grado de indeterminación (I) y algún grado de falsedad (F), donde (V, I, F) $\notin \{(1,0,0),(0,0,1)\}$, y ninguna otra operación o axioma es totalmente falso (F = 1), entonces esto se llama NeutroÁlgebra.

22.3. AntiAlgebra

Una estructura algebraica que tiene al menos una operación que está totalmente definida externamente (F = 1) o al menos un axioma que es totalmente falso (F = 0), se llama AntiAlgebra.

23. Definición de IndetermÁlgebra

Se introduce ahora por primera vez el concepto de IntermAlgebra (= Álgebra Indeterminada), como una subclase de NeutroAlgebra.

IndetermAlgebra se obtiene de aplicaciones reales, como se verá más adelante.

Sea $\mathcal{U}$ un universo de discurso, y H un conjunto no vacío incluido en $\mathcal{U}$.

Si al menos una operación o un axioma tiene algún grado de indeterminación (*I>0*), el grado de falsedad F = *0*, y todas las demás operaciones y axiomas son totalmente ciertos, entonces H es un Álgebra Indeterminada.

24. Definición de Álgebra IndetermSoft

El conjunto *H(⩓,⩔, ⩔E,⫬*) cerrado mediante los siguientes operadores:
joinAND (denotado por ⩓), que es un operador determinado;
disjoinOR(denotado por ⩔), que es un operador indeterminado;
exclussiveOR (denotado por ⩔E), que es un operador indeterminado,
y subnegación/subcomplemento NOT (indicado por ⫬), que es un operador indeterminado;
entonces se llama Álgebra IndetermSoft.
El Álgebra IndetermSoft amplía el Álgebra clásica de Soft Sets.
El Álgebra IndetermSoft es un caso particular de IndetermÁlgebra, y de NeutroÁlgebra.
El operador *joinAND*

⩓: $H^2 \longrightarrow H$(⩓,⩔, ⩔E,⫬)
es <u>determinado</u> (en el sentido clásico):
$\forall x, y \in H,\ x \neq y,\ x$ ⩓ $y = x$ unionAND ($y = xy = \{x, y\} \in H$⩓,⩔, ⩔E,⫬)
por lo tanto, la agregación de x e y utilizando el operador ⩓ da un resultado claro y único, es decir, el conjunto clásico de dos elementos: $\{x, y\}$
Pero el operador disjoinOR
⩔: H^2 ⟶H(⩓,⩔, ⩔E,⫬)
es indeterminado porque:

$$\forall x, y \in H,\ x \neq y,\ \text{disjoinOR } y = \begin{cases} \text{ya sea } x \\ \text{o } y \\ \text{o ambos } \{x \text{ e } y\} \end{cases} \begin{cases} x \\ y \\ \{x, y\} \end{cases}$$

Por lo tanto, la agregación de x e y usando el operador ⩔ da un resultado poco claro, con tres posibles soluciones alternativas (ya sea x, o y, o $\{x$ e $y\}$).

El operador exclussiveOR también es indeterminado:

$\forall x, y \in H$, $x \neq y$, $x \neq y$⩔e y exclussiveOR ya sea x, o y, y no $\{x, y\}$,

por lo tanto dos posibles soluciones:

⩔E:H^2 ⟶H(⩓,⩔, ⩔E,⫬).

De manera similar, el operador subnegación/subcomplemento NOT

⫬: H ⟶H(⩓,⩔, ⩔E,⫬)

es <u>indeterminado</u> debido a muchos elementos $x \in H$,

NOT(x)= = x = una parte del complemento de x con respecto a H⫬ x

= un subconjunto de $H \setminus \{x\}$.

Pero hay muchos subconjuntos de $H \setminus \{x\}$, por lo tanto, hay una salida poco clara (incierta, ambigua), con múltiples soluciones alternativas posibles.

25. Definición de Conjunto IndetermSoft

Sea *U* un universo de discurso, *H* un subconjunto no vacío de *U*, y *H*(⩓,⩔, ⩔E,⫬) el Álgebra IndetermSoft generada al cerrar el conjunto *H* bajo los operadores ⩓,⩔, $⩔_E$, y ⫬.

Sea *a* un atributo, con su conjunto de valores de atributos denotados por *A*. Entonces el par

(F, *A)*, donde F: $A \to$ *H*(⩓,⩔, $⩔_E$,⫬)*,* se llama Conjunto IndetermSoft sobre H.

26. Conjunto IndetermSoft Difuso/Intuicionista Difuso/Neutrosófico/y otras extensiones difusas

Se pueden asociar grados difusos/intuicionistas difusos/neutrosóficos, etc. y extender el Conjunto IndetermSoft a Conjunto IndetermSoft Difuso/Intuicionista Difuso/Neutrosófico/y otras extensiones difusas.

26.1. Aplicaciones del conjunto IndetermSoft (Difuso/Intuicionista Difuso/Neutrósofico/y otras extensiones difusas)

Sea *H = {*h_1, h_2, h_3, h_4*}* un conjunto de cuatro casas, y el Álgebra IndetermSoft generada al cerrar el conjunto *H* mediante los operadores suaves anteriores, *H*(⩓,⩔, ⩔E,⫬).

Sea el atributo *c = color*, y sus valores de atributo sean el conjunto C = {blanca, verde, azul}.

La función IndetermSoft F : A⟶ *H(⩓,⩔, ⩔E,*⫬) forma un Conjunto IndetermSoft.

Sea un elemento $h \in H$, y se denota por:

$d^{\circ}(h)$ = cualquier tipo de grado (ya sea difuso, o intuicionista difuso, o neutrosófico, o cualquier otra extensión difusa) del elemento *h*.

Se extienden los operadores suaves *⩓, ⩔, ⩔E,*⫬ asignando algún grado $d^0(.) \in [0,1]^p$, dónde:

p = 1 para el grado clásico y difuso, p = 2 para el grado difuso intuicionista, p = 3 para el grado neutrosófico, y así sucesivamente p = n para el grado neutrosófico refinado de valor n, hasta los elementos involucrados en los

operadores, donde $\wedge, \vee, \neg$ representan la conjunción, la disyunción y la negación, respectivamente, de estos grados en sus correspondientes conjuntos o lógicas de extensión difusa.

Por ejemplo:

i. De *F(blanco)* = h_1⩓h_2 como en el conjunto IndetermSoft, se extiende a:

F(blanca) = $h_1(d_1^{\circ})$ ⩓ $h_2(d_2^{\circ})$, lo que significa que el grado (oportunidad) de que h_1 sea blanco es d_1° y el grado (oportunidad) de que h_2 sea blanca es d_2°, de donde:

F(blanca) = $h_1(d_1^{\circ})$ ⩓ $h_2(d_2^{\circ}) = \{h_1, h_2\}(d_1^{\circ} \wedge d_2^{\circ})$

Como tal, el grado en que ambas casas *{h₁, h₂} = {h₁ y h₂}* sean blancas es $d_1^\circ \wedge d_2^\circ$.

ii. Similarmente, *F(blanca)* = $h_1(d_1^\circ)$ ⩒ $h_2(d_2^\circ)$ = {h₁ o h₂} $(d_1^\circ \vee d_2^\circ)$,

o el grado de al menos una casa *{h₁ o h₂}* sea blanca es $(d_1^\circ \vee d_2^\circ)$.

iii. *F(blanca)* = $h_1(d_1^\circ)$ ⩒E $h_2(d_2^\circ)$ =

= { h_1 y (no h_2)}, *o* o { (no h_1) y h_2 }, y { (no h_1) y (no h_2) }

= *(h1 es blanco, o h_2 es blanco, y [no ambos {h1, h_2}] son blancos simultáneamente)* tiene el grado de $(d_1^\circ \vee d_2^\circ) - (d_1^\circ \wedge d_2^\circ)$.

iv. *F(blanca)* = (⫬h_1)(d_1°), lo que significa que el grado (probabilidad) de que h_1 no sea blanco es (⫬ h_1 = *NO(h_1) = ya sea h_2, o h_3, o h_4,*

o {h_2, h_3}, {h_2, h_4}, {h_3, h_4},

o {h_2, h_3, h_4},

o ϕ (ninguna casa).

Hay 8 alternativas, por lo que NOT(h_1) es una de ellas.

Suponiendo que NOT(h_1) = {h_3, h_4}. Entonces el grado de que ambas casas {h_3, h_4} sean blancas es $\neg d_1^\circ$.

27. Definición de conjunto IndetermHyperSoft

Sea *U* un universo de discurso, *H* un subconjunto no vacío de *U* y *H*(⩓, ⩒, ⩒E, ⫬) el Álgebra IndetermSoft generado al cerrar el conjunto *H* bajo los operadores ⩓, ⩒, ⩒E, y ⫬.

Sea $a_1, a_2, \ldots a_n$, donde $n \geq 1$, n atributos distintos, cuyos valores de atributo correspondientes sean respectivamente los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, con $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, y $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces el par $(F, A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)$, donde $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ representa un producto cartesiano, con

F: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \rightarrow$ *H*(⩓, ⩒, ⩒E, ⫬), se denomina Conjunto IndetermHyperSoft.

De manera similar, se puede asociar grados difusos/intuicionistas difusos/neutrosóficos, etc. y extender el Conjunto IndetermHyperSoft a algún Conjunto IndetermHyperSoft Difuso/Intuicionista Difuso/Neutrosófico, etc.

28. Aplicaciones del Conjunto IndetermHyperSoft

Sea nuevamente $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ un conjunto de cuatro casas, y el atributo *c = color*, cuyos valores son *C = {blanca, verde, azul, roja}*, y otro atributo *p = precio*, cuyos valores son *P = {barata, cara}*.

La función

$F: C \times P \rightarrow \mathcal{P}(H)$

donde $\mathcal{P}(H)$ es el conjunto potencia de *H*, es un Conjunto HyperSoft.

F: $C \times P \rightarrow$ *H*(⩓, ⩒, ⩒E, ⫬), se denomina Conjunto IndetermHyperSoft.

Ejemplos:

F(blanca, barata) = h_2⩒h_4

F(verde, cara) = h_1⩒Eh_2

F(roja, cara) = h_3⫬

Para un conjunto IndetermHyperSoft Neutrosófico se tienen grados neutrosóficos, por ejemplo:

F(blanco, barato) = *h_2(0.4, 0.2, 0.3)*⩒*h_4 (0.5, 0.1, 0.4)*

De la misma manera que arriba (Sección 26.1), se extienden los operadores de HyperSoft ⩓, ⩒, ⩒E, ⫬ asignando algún grado $d^0(.) \in [0,1]^p$, donde: *p = 1* para grado clásico y difuso, p = 2 para grado difuso intuicionista, p = 3 para grado neutrosófico, y así sucesivamente p = n para grado neutrosófico refinado de n-valor, a los elementos involucrados en los operadores, donde $\wedge, \vee, \neg$ representan la conjunción, la disyunción y la negación, respectivamente, de estos grados en sus correspondientes conjuntos o lógicas de extensión difusa.

29. Definición de Grupo Conmutativo de Tripleta Neutrosófica

Sea $\mathcal{U}$ un universo de discurso, y $(H,*)$ un conjunto no vacío incluido en $\mathcal{U}$, donde * es una operación binaria (ley) sobre H.

(i) La operación * sobre H es bien definida, asociativa y conmutativa.

(ii) Para cada elemento $x \in H$ existe un elemento $y \in H$, llamado neutro de x, tal que y es diferente del elemento unidad (si lo hay), con $x * y = y * x = x$, y existe un elemento $z \in H$, llamado el inverso de x, tal que $x * z = z * x = y$, entonces a $\langle x, y, z \rangle$ se le llama tripleta neutrosófica.

Entonces $(H, *)$ es el Grupo Conmutativo de Tripleta Neutrosófica.

En general, el Álgebra de Tripleta Neutrosófica es diferente del Álgebra Clásica.

29.1. Teorema 3

El Álgebra de join AND $(H, \curlywedge)$ y el Álgebra de disjoinOR $(H, \curlyvee)$, son Grupos Conmutativos de Tripleta Neutrosófica.

Prueba

Anteriormente se ha probado que los operadores $\curlywedge$ y $\curlyvee$ son cada uno de ellos: bien definidos, asociativos y conmutativos.

También se probó que los dos operadores son idempotentes:

$\forall x \in H, x \curlywedge x = x$ y $x \curlyvee x = x$.

Por lo tanto, para $(H,\curlywedge)$ y $(H,\curlyvee)$ respectivamente se tienen tripletas neutrosóficas de la forma: $\langle x, x, x \rangle$.

30. Enriquecimiento de los Conjuntos IndetermSoft e IndetermHyperSoft

Se invita a los lectores a ampliar esta investigación, ya que se pueden agregar más operadores suaves determinados e indeterminados a las Álgebras IndetermSoft o IndetermHyperSoft, resultantes de (o necesarios para) varias aplicaciones reales, y como tal, se obtienen estructuras Soft e HyperSoft más fuertes.

Algunas sugerencias:

F(blanca) = al menos k casas;

o *F(blanca) = como mucho k casas*;

o *F(verde, pequeña) = entre* k_1 *y* k_2 *casas*;

donde k, k_1 y k_2 son números enteros positivos, con $k_1 \leq k_2$.

Etc.

31. Conclusiones

Los operadores suaves indeterminados, presentados en este documento, son el resultado de aplicaciones de nuestro mundo real. Un álgebra definida mediante tales operadores se denominaba álgebra suave indeterminada.

Los conjuntos IndetermSoft e IndetermHyperSoft, y sus correspondientes formas Difusa/Intuicionista Difusa/Neutrosófica, construidas sobre esta álgebra indeterminada, se presentan por primera vez como extensiones de los Conjuntos Soft e HyperSoft clásicos.

Se muestran muchas aplicaciones y ejemplos.

Agradecimientos

El autor quiere agradecer a Muhammad Saeed, Atiqe Ur Rahman y Muhammad Ihsan por sus comentarios sobre este artículo.

1. Molodtsov, D. (1999) Soft Set Theory First Results. *Computer Math. Applic.* 37, 19-31.
2. Maji, P. K. (2013) Neutrosophic Soft Set. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics* 5 (1), 157-168.

3. Smarandache, F. (2018) Extension of Soft Set to Hypersoft Set, and then to Plithogenic Hypersoft Set, *Neutrosophic Sets and Systems* 22, 168-170.
DOI: 10.5281/zenodo.2159754, http://fs.unm.edu/NSS/ExtensionOfSoftSetToHypersoftSet.pdf
4. Smarandache, F. (2019) Extension of Soft Set to Hypersoft Set, and then to Plithogenic Hypersoft Set (revisited). *Octogon Mathematical Magazine*, 27(1), 413-418.
5. Shazia Rana; Madiha Qayyum; Muhammad Saeed; Florentin Smarandache; Bakhtawar Ali Khan (2019). Plithogenic Fuzzy Whole Hypersoft Set, Construction of Operators and their Application in Frequency Matrix Multi Attribute Decision Making Technique. *Neutrosophic Sets and Systems* 28, http://fs.unm.edu/neut/PlithogenicFuzzyWholeHypersoftSet.pdf
6. Nivetha Martin, Florentin Smarandache (2020). Introduction to Combined Plithogenic Hypersoft Sets. *Neutrosophic Sets and Systems* 35, 8 p.
http://fs.unm.edu/neut/IntroductionToCombinedPlithogenic.pdf
7. Mujahid Abbas; Ghulam Murtaza, Florentin Smarandache (2020). Basic operations on hypersoft sets and hypersoft point. *Neutrosophic Sets and Systems*, 35, 2020, 15 p.
http://fs.unm.edu/neut/BasicOperationsOnHypersoft.pdf
8. Muhammad Ihsan; Muhammad Saeed; Atiqe Ur Rahman; Florentin Smarandache (2022). An Inclusive Study on Fundamentals of Hypersoft Expert Set with Application, *Punjab University Journal of Mathematics* 54(5), 315-332, https://doi.org/10.52280/pujm.2022.540503
9. Muhammad Saqlain; Muhammad Riaz; Muhammad Adeel Saleem; Miin-Shen Yang. Distance and Similarity Measures for Neutrosophic HyperSoft Set (NHSS) with Construction of NHSS-TOPSIS and Applications. *IEEE Access*, 14;
DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3059712, http://fs.unm.edu/neut/DistanceAndSimilarityNHSSTOPSIS.pdf
10. Smarandache, F. (2015). Neutrosophic Function, 14-15, in *Neutrosophic Precalculus and Neutrosophic Calculus*, EuropaNova, Brussels, http://fs.unm.edu/NeutrosophicPrecalculusCalculus.pdf
11. Smarandache, F. (2014). Neutrosophic Function, in *Introduction to Neutrosophic Statistics*, Sitech & Education Publishing, 74-75; http://fs.unm.edu/NeutrosophicStatistics.pdf.
12. Smarandache, F. (2019). Introduction to NeutroAlgebraic Structures and AntiAlgebraic Structures [http://fs.unm.edu/NA/NeutroAlgebraicStructures-chapter.pdf], in *Advances of Standard and Nonstandard Neutrosophic Theories*, Pons Publishing House, Brussels, Belgium, Chapter 6, 240-265;
http://fs.unm.edu/AdvancesOfStandardAndNonstandard.pdf
http://fs.unm.edu/NA/NeutroAlgebra.htm
13. Smarandache, F. (2020). NeutroAlgebra is a Generalization of Partial Algebra. *International Journal of Neutrosophic Science* 2, 8-17; DOI: http://doi.org/10.5281/zenodo.3989285
http://fs.unm.edu/NeutroAlgebra.pdf
14. Smarandache, F.; Al-Tahan, Madeline (eds.) (2022). Theory and Applications of NeutroAlgebras as Generalizations of Classical Algebras. IGI Global, USA, 333 p.; https://www.igi-global.com/book/theory-applications-neutroalgebras-generalizations-classical/284563

Recibido: Mayo 15, 2022. **Aceptado:** Junio 02, 2022